

Abbildung durch Linsen - LIN

Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München – Grundpraktikum für Humanmediziner
(13. APRIL 2021)

MOTIVATION UND VERSUCHSZIELE

Die *geometrische Optik* beschreibt die Ausbreitung des Lichtes in Form von Lichtstrahlen, d. h. unter Vernachlässigung seiner Wellennatur. Voraussetzung für die Anwendung der geometrischen Optik ist, dass die optischen Elemente (Blenden, Spiegel, Prismen oder Linsen) groß im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts sind. Dann ändern diese Elemente allein die Ausbreitungsrichtung des Lichts.

Linsen sind die Grundbausteine vieler optischer Instrumente, z.B. Lupe, Mikroskop oder Fotoapparat. Im Versuch bestimmen Sie die Brennweite von verschiedenen Linsen in Luft und untersuchen den Astigmatismus. Im letzten Teilversuch beschäftigen Sie sich mit dem menschlichen Auge anhand eines optischen Wannensmodells des Auges.

Contents

I. Teilversuche	2
II. Physikalische Grundlagen	2
II.1. Elektromagnetische Wellen	2
II.2. Reflexion und Brechung	3
II.3. Totalreflexion	4
II.4. Optische Linsen und Bildkonstruktion	5
1. Brechung am Prisma	5
2. Optische Achse (OA)	6
3. Brennpunkt (F)	6
4. Brennweite (f)	7
5. Brennebene	7
6. Gegenstands- und Bildweite	7
7. Dünne Linsen	7
8. Dicke Linsen	7
9. Bildkonstruktionen	7
II.5. Die Abbildungsgleichung für eine Linse	9
II.6. Linsensysteme	9
II.7. Das Auge	10
1. Optischer Aufbau des Auges	10
2. Brechung an einer sphärischen Grenzfläche zweier Medien	10
3. Abbildung durch eine Linse zwischen zwei verschiedenen Medien	11
4. Kenngrößen des Auges	11
5. Akkommodation und Fehlsichtigkeit	11
II.8. Linsenfehler	12
1. Sphärische Aberration	12
2. Chromatische Aberration	12
3. Astigmatismus	13
III. Versuchsaufbau und Geräte	13
III.1. Zubehör	13
... für die Online-Versuche	13
... für die „Versuche daheim“	13
III.2. Brennweitenbestimmung mit Hilfe der Abbildungsgleichung	13
III.3. Bessel-Verfahren	13
IV. Versuchsdurchführung	14
IV.1. Messprinzip (Versuch „daheim“)	14
1. Kurzbeschreibung	14
2. Messgrößen	14
3. Durchführung	14
IV.2. Messung von Bild- und Gegenstandsweite (Versuch „daheim“)	14
1. Kurzbeschreibung	14

2. Messgrößen	15
3. Durchführung	15
IV.3. Bessel-Verfahren (Versuch „daheim“)	15
1. Kurzbeschreibung	15
2. Messgrößen	15
3. Durchführung	15
IV.4. Bestimmung der Brennweite des Brillenglases ohne Astigmatismus	15
1. Kurzbeschreibung	15
2. Messgrößen und Durchführung	15
IV.5. Bestimmung der Brennweite eines Starbrillenglases	16
1. Kurzbeschreibung	16
2. Messgrößen und Durchführung	16
IV.6. Untersuchungen eines astigmatischen Brillenglases	16
1. Kurzbeschreibung	16
2. Messgrößen und Durchführung	17
IV.7. Untersuchungen am Augenmodell	17
1. Kurzbeschreibung	17
2. Messgrößen und Durchführung	17
V. Auswertung	18
V.1. Messprinzip (Versuch „daheim“)	18
V.2. Messung von Bild- und Gegenstandsweite (Versuch „daheim“)	18
V.3. Bessel-Verfahren (Versuch „daheim“)	18
V.4. Bestimmung der Brennweite des Brillenglases ohne Astigmatismus	18
V.5. Bestimmung der Brennweite eines Starbrillenglases	18
V.6. Untersuchungen eines astigmatischen Brillenglases	18
V.7. Untersuchungen am Augenmodell	18

I. TEILVERSUCHE

1. Messprinzip (Versuch „daheim“)
2. Messung von Bild- und Gegenstandsweite (Versuch „daheim“)
3. Bessel-Verfahren (Versuch „daheim“)
4. Bestimmung der Brennweite eines Brillenglases ohne Astigmatismus
5. Bestimmung der Brennweite eines Starbrillenglases
6. Untersuchung eines astigmatischen Brillenglases
7. Untersuchungen am Augenmodell

II. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

II.1. Elektromagnetische Wellen

Licht ist eine *elektromagnetische Welle*. Eine solche Welle besteht aus einem elektrischen (\vec{E}) und einem magnetischen (\vec{B}) Wechselfeld gleicher Frequenz, die immer senkrecht aufeinander in Phase schwingen. Elektromagnetische Wellen sind transversal, d.h. die Felder stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Ein Spezialfall einer solchen Welle ist in Abb. 1 dargestellt. Bei einer elektromagnetischen Welle schwingt – anders als bei Wasser- oder Schallwellen – keine Materie, weshalb elektromagnetische Wellen kein Medium zur Ausbreitung benötigen. Licht von den Sternen gelangt auch

durch das Vakuum des Weltraums ungehindert zur Erde.

Allgemein gilt für jede Art von Wellen:

$$v = \lambda \cdot f \tag{1}$$

wobei v = Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, λ = Wellenlänge, f = Frequenz (vgl. Versuche SIG und SON).

Speziell für eine elektromagnetische Welle ist die Frequenz f eine charakteristische Konstante, welche die Energie – die „Farbe“ des Lichtes – angibt. Elektromagnetische Wellen haben auch Eigenschaften von Teilchen. Diese Teilchen bezeichnet man als Photonen. Die Energie eines Photons hängt dabei von der Frequenz der zugehörigen Welle ab:

$$E = h \cdot f, \tag{2}$$

wobei $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ J · s das Planck'sche Wirkungs-

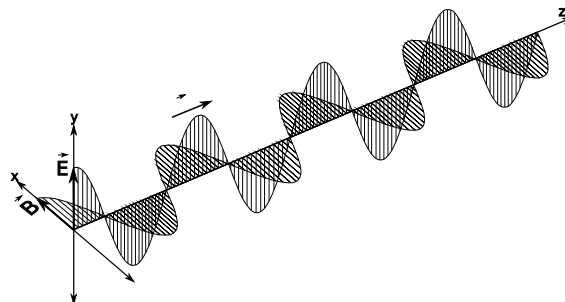


Abb. 1: Spezialfall einer transversalen elektromagnetischen Welle. Der Pfeil in z-Richtung zeigt die Ausbreitungsrichtung der Welle.

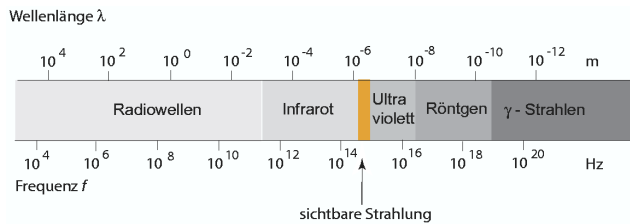


Abb. 2: Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung. Die Wellenlängen sind für die Ausbreitung der Strahlung im Vakuum angegeben.

quantum ist.

Im Vakuum bewegt sich eine elektromagnetische Welle unabhängig von λ mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Bewegt sich die Welle in einem Medium fort, so ist Frequenz in allen Medien gleich. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit auch ihre Wellenlänge sind jedoch abhängig vom Medium. Beschreibt man eine elektromagnetische Welle durch λ ohne weitere Angabe, so geht man vom Ausbreitungsmedium Vakuum oder Luft ($c_0 \approx v_{\text{Luft}}$) aus. Der sichtbare Wellenlängenbereich reicht etwa von 400 nm bis 800 nm (vgl. Abb. 2). Es ist üblich, auch die angrenzenden Wellenlängen, nämlich die Infrarot- und die Ultraviolettstrahlung, als Licht zu bezeichnen.

II.2. Reflexion und Brechung

Trifft ein Lichtstrahl auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien, so wird er in der Regel teilweise reflektiert und teilweise dringt er in das Medium ein (vgl. Abb. 3).

Für die Reflexion gilt das *Reflexionsgesetz*:

$$\text{Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel}$$

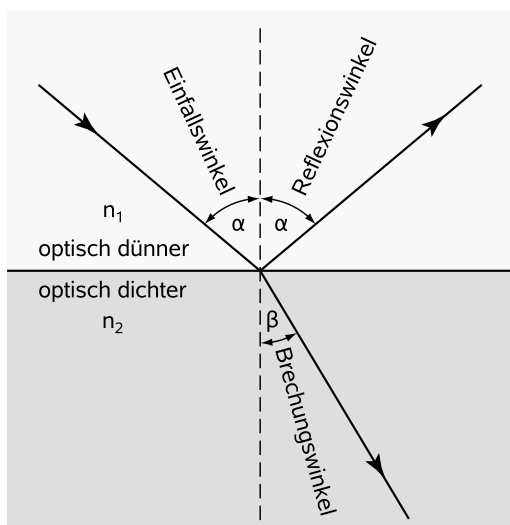


Abb. 3: Reflexions- und Brechungsgesetz. n_1 und n_2 sind die Brechzahlen der beiden Medien. α und β sind der Einfallswinkel bzw. der Brechungswinkel.

Dabei werden die Winkel relativ zur Flächennormalen und nicht zur Fläche selbst gemessen, weil das Reflexionsgesetz damit auch für gekrümmte Flächen (z.B. Linsen oder Augenspiegel) sinnvoll formuliert ist.

Beim Eindringen in das Medium ändert das Licht seine Richtung. Wie stark dies passiert, beschreibt die *Brechzahl* n . Sie ist eine Materialkonstante.

Diesen Zusammenhang beschreibt das von Snellius (1580-1626) empirisch gefundene *Brechungsgesetz*. Snellius stellte fest, dass das Verhältnis der Sinuswerte von Einfallswinkel α und Brechungswinkel β an einer gegebenen Grenzfläche stets dieselbe Zahl liefert:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const.} = \frac{n_2}{n_1} \tag{3}$$

n_1 und n_2 sind die Brechzahlen der beiden Medien.

Die allgemeine Formulierung des Brechungsgesetzes ist:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta \tag{4}$$

Löst man Gl. 4 nach $\sin \beta$ auf, bekommt man

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha \tag{5}$$

Gilt $n_2 > n_1$, so nennt man Medium 2 optisch dichter als Medium 1. Dann ist der Brechungswinkel β kleiner als der Einfallswinkel α . Der einfallende Strahl wird zum Lot hin gebrochen, wie in Abb. 3 dargestellt. Wasser ist z. B. optisch dichter als Luft und Glas optisch dichter als Wasser. Der Brechungsindex für Luft weicht (unter normalen Bedingungen) nur sehr wenig von dem des Vakuums ab und wird oft diesem näherungsweise gleichgesetzt:

$$n_{\text{Luft}} = 1,0003 \approx n_{\text{Vakuum}} = 1 \tag{6}$$

Die Hintergründe der Brechung werden im Folgenden genauer erläutert:

Im Wellenbild des Lichtes nach Huygens (1629-1695) ist der Brechungsindex n eines Mediums definitionsgemäß das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

$$n = \frac{\text{Ausbreitungsgeschw. im Vakuum}}{\text{Ausbreitungsgeschw. im Medium}} = \frac{c_0}{v} \tag{6}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in optisch dichteren Medien ist stets kleiner als in optisch dünneren, damit sind Brechungsindizes von Medien stets >1 . Da der Brechungsindex vom Medium abhängt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in verschiedenen Medien unterschiedlich.

Nimmt man die Wellenvorstellung zu Hilfe, so lässt sich zunächst das Reflexionsgesetz gemäß Abb. 4 folgendermaßen erklären: Man betrachtet ein einfallendes Bündel ebener Wellen geeigneter Breite, einen *Strahl* (vgl. Abb. 4). Die Pfeile in Abb. 4 zeigen in die Fortpflanzungsrichtung der Welle. Die Linien gleicher Phase nennt man *Wellenfronten* (vgl. SIG und SON). Sie stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Zwei benachbarte Wellenfronten haben zueinander den Abstand λ_1 . Wäh-

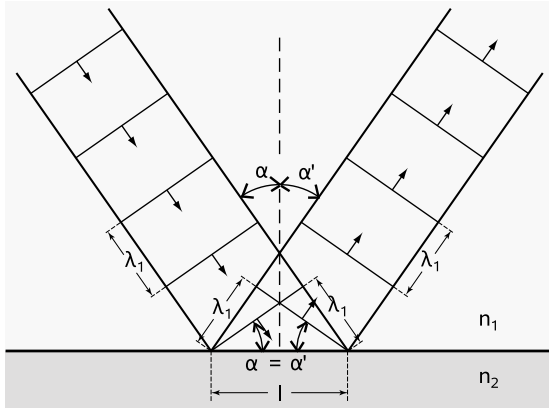


Abb. 4: Reflexion im Wellenbild.

rend in Abb.4 die letzte Wellenfront gerade noch die Strecke λ_1 bis zur Grenzfläche zurücklegt, breitet sich die reflektierte Welle im gleichen Medium mit gleicher Geschwindigkeit aus. Die Wellenlänge ändert sich bei der Reflexion nicht, da die Strahlung im selben Medium bleibt. Die kurzen Katheten der beiden rechtwinkligen Dreiecke an der Grenzfläche sind gleich lang und zwar gleich der Wellenlänge λ_1 im Medium 1. Die Dreiecke stimmen in allen drei Seiten paarweise überein und sind somit kongruent. Damit wird aber auch $\alpha = \alpha'$. Ferner sind α und α' in den Dreiecken auch gleich dem Einfallsbzw. Reflexionswinkel gemäß Abb. 3 (Paare aufeinander senkrecht stehender Schenkel liefern gleiche Winkel.).

Analog kann man mit Hilfe des Wellenmodells auch die Lichtbrechung gemäß Abb. 5 erklären. Während dort die letzte Wellenfront im optisch dünneren, oberen Medium gerade noch die Strecke λ_1 bis zur Grenzfläche zurücklegt, breitet sich die Welle im optisch dichteren, unteren Medium schon mit kleinerer Geschwindigkeit aus. Die Wellenlänge wird folglich verkürzt auf λ_2 . Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke an der Grenzfläche gilt in diesem Fall gemäß der Sinus-Definition:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_1}{L} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\lambda_2}{L}$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, so erhält man:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} . \tag{7}$$

Wegen Gl. 1 folgt unmittelbar das Brechungsgesetz gemäß Gl. (3):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1/f}{v_2/f} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 c_0}{v_2 c_0} = \frac{c_0/v_2}{c_0/v_1} = \frac{n_2}{n_1} .$$

Dass die Frequenz sich bei Lichtbrechung nicht ändert, ist eine Folge des Energieerhaltungssatzes (vgl. Gl. 2); eine Frequenzänderung wäre gleichbedeutend mit einer Energieänderung. Wie später demonstriert wird, hängt der Brechungsindex n eines Mediums von der Wellenlänge des einfallendes Lichtes ab (vgl. III.8). Folglich ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes abhän-

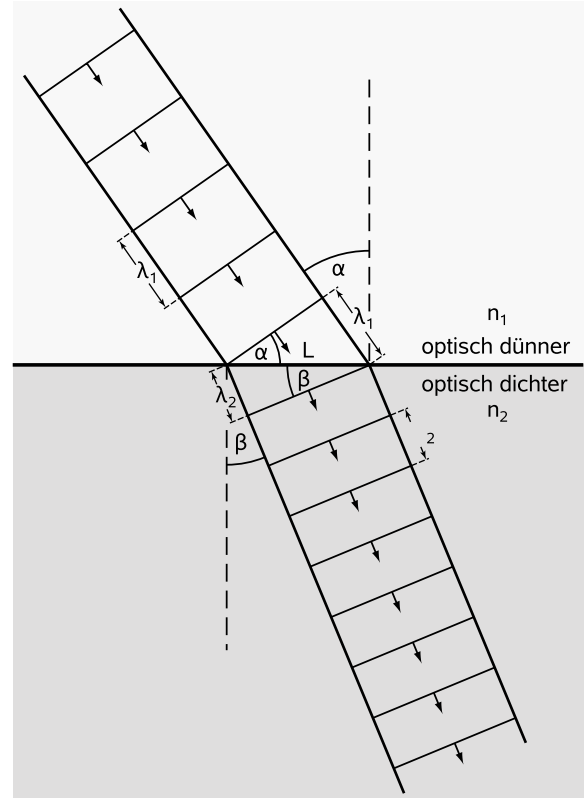


Abb. 5: Lichtbrechung im Wellenbild.

gig von der Wellenlänge. Im Gegensatz zum sichtbaren Licht breiten sich Röntgen- und γ -Strahlen in Materie nahezu mit Vakuumlichtgeschwindigkeit aus, es findet also fast keine Brechung statt.

II.3. Totalreflexion

In Abb. 3 und Abb. 5 ist der Brechungswinkel β stets kleiner als der Einfallswinkel α : der Lichtstrahl wird beim Eintritt in das optisch dichtere Medium zum Lot hin gebrochen. Umgekehrt liegen die Verhältnisse, wenn der Strahl vom optisch dichteren Medium 2 kommend ins optisch dünnere Medium 1 gebrochen wird. Dann ist $\beta > \alpha$ (Abb. 6).

Größer als 90° kann der Brechungswinkel nicht werden. Denjenigen Einfallswinkel α_T im dichteren Medium, bei dem $\beta = 90^\circ$ wird, bezeichnet man als Grenzwinkel der Totalreflexion. Beim Grenzwinkel der Totalreflexion gilt $\sin \beta = 1$. Für $\alpha > \alpha_T$ gibt es keinen gebrochenen Strahl mehr, die gesamte einfallende Strahl wird reflektiert. Aus Gl. (3) folgt

$$\sin \alpha_T = \frac{n_1}{n_2} . \tag{8}$$

Für Luft ($n_1 = 1$) reduziert sich Gl. (11) auf

$$\sin \alpha_T = \frac{1}{n_2} .$$

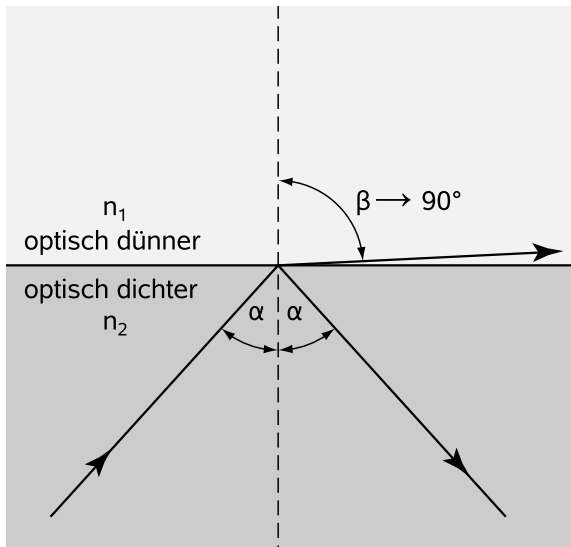


Abb. 6: Zur Totalreflexion

Totalreflexion tritt also nur beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium auf. Lichtleiter und Endoskop sind Anwendungsbereiche dieses Phänomens.

Ein Lichtleiter aus Glas bewirkt, dass Licht auch „krumme“ Wege gehen kann, siehe Abb. 7a. Eine gebogene Glasfaser mit hohem Brechungsindex leitet Licht durch wiederholte Totalreflexion (mit geringem Intensitätsverlust) ans Faserende. Licht kann so praktisch jeden gewünschten Ort erreichen und z.B. das Innere des Magens beleuchten. Umgekehrt ist es in der Endoskopie möglich, die innere Magenoberfläche abzubilden. Dazu verwendet man sehr

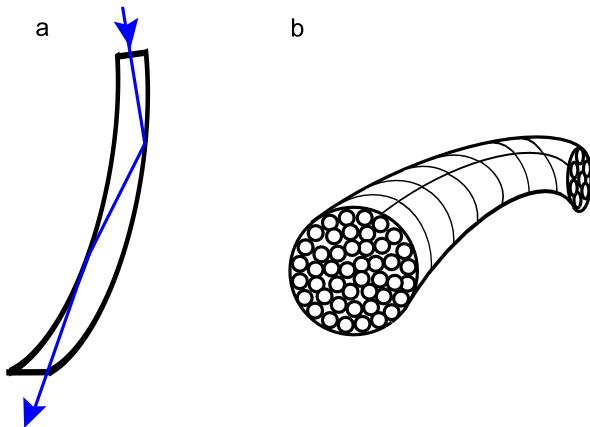


Abb. 7: a) Lichtleiter aus Glas; b) Optisches Kabel

feine Glasfasern. Man umgibt sie mit einem dünnen Mantel aus einem Material mit niedrigerem Brechungsindex (optische Isolation) und fasst möglichst viele zu einem ganzen Bündel zusammen. Ein solches biegsames Kabel (Abb. 7b) führt man z.B. nahe an die Magenschleimhaut ein. In jede einzelne Faser gelangt dann nur Licht von einer winzigen Stelle der Schleimhaut. Das Faserbündel liefert ein Raster von Bildpunkten, wodurch die entsprechende Magenoberfläche am anderen Kabelende sichtbar wird. Je feiner die Glasfasern sind, umso besser ist das Auflösungsvermögen und damit die Bildqualität.

Die Tatsache, dass der Winkel der Totalreflexion und damit der Brechungsindex einer Substanz gut zu bestimmen ist, wird beim Abbe-Refraktometer ausgenutzt. Stoffgemische wie ätherische Öle und Fette lassen sich damit charakterisieren. Beimengungen, Verfälschungen und Verdorbenheit können zu einer Veränderung der Brechzahl führen. Bei Glycerol ist aufgrund des Brechungsindex eine schnelle quantitative Bestimmung des Wassergehalts möglich, weil n_{Glycerol} mit zunehmendem Wassergehalt abnimmt.

II.4. Optische Linsen und Bildkonstruktion

Optische Linsen sind durchsichtige Körper aus einer das Licht brechenden Substanz, die von gekrümmten Flächen begrenzt werden. Man kann sie sich in Näherung aus Prismen zusammengesetzt denken (vgl. Abb. 10). Man unterscheidet verschiedene Typen von Linsen, siehe Abb. 8. Etwas zusammengefasst/vereinfacht gilt:

- Sammellinsen oder Konvexlinsen: in der Linsenmitte dicker als am Rand, und
- Zerstreuungslinsen oder Konkavlinen: in der Linsenmitte dünner als am Rand.

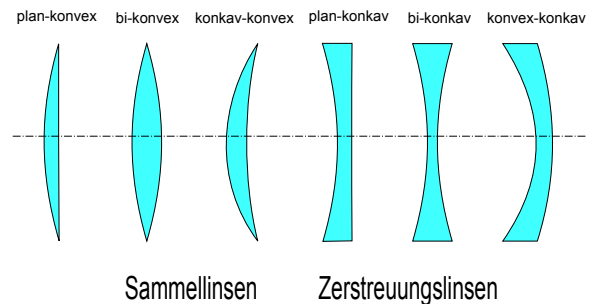


Abb. 8: Schnittbilder von elementaren Linsentypen.

1. Brechung am Prisma

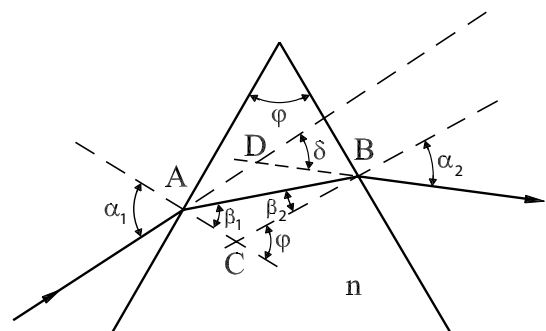


Abb. 9: Brechung am Prisma.

Der Strahlengang eines Lichtbündels (Strahl), der aus der Luft kommend unter einem Einfallswinkel α_1 auf ein Dreikant-Prisma mit Prismenwinkel φ trifft, ist in Abb. 9 gezeigt. An der Grenzfläche zwischen der Luft (Brechzahl 1) und dem Prisma (Brechzahl $n > 1$) findet Brechung statt, d. h. der Strahl wird unter einem Winkel β_1 gebrochen. Es gilt das Brechungsgesetz von Snellius:

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{n} \sin \alpha_1 . \tag{9}$$

Der einfallende Strahl wird dabei zum Lot hin gebrochen.

Weiter trifft der Strahl auf die nächste Prismenoberfläche unter dem Winkel $\beta_2 = \varphi - \beta_1$ (Berechnung über Winkelsumme im Dreieck CBA). Dort wird der Strahl wieder gebrochen und verlässt das Prisma unter dem Winkel α_2 . Weil hier aber das Licht vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium übertritt, wird der einfallende Strahl vom Lot weg gebrochen. Man sieht, dass der Lichtstrahl an den beiden Grenzflächen in gleicher Richtung abgelenkt wird. Mit geometrischen Überlegungen ergibt sich die gesamte Ablenkung δ (Ablenkwinkel) zu:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi .$$

Brechungsindizes optischer Medien sind wellenlängenabhängig. Man nennt dies *Dispersion*¹. Im Normalfall ist die Brechzahl für blaues Licht einige Prozent größer als für rotes (normale Dispersion). Diesen Effekt benutzt man, um das weiße Sonnenlicht an einem Prisma in seine Spektralfarben, nämlich Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violett, zu zerlegen. Auch die blaue Farbe des Himmels ist auf dieses Phänomen zurückzuführen.

Um den Strahlengang an Linsen nachzuvollziehen, denkt man sich die Linsen als Zusammensetzung von Prismen (vgl. Abb. 10).

¹ Meist gibt man den Brechungsindex für die D-Linie des Natriums mit der Wellenlänge $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ an und macht dies durch den Zusatz D deutlich. Die Brechzahl ist auch von der Temperatur abhängig. Meist gibt man den Wert für 20° C und schreibt n_D^{20} .

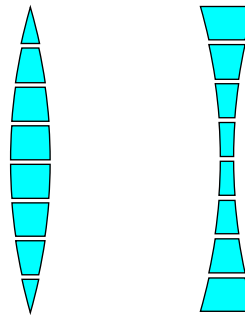


Abb. 10: Bei einer Konvex- oder Sammellinse (links) sind die Prismen so gestaltet, dass sie alle Strahlen eines parallelen Lichtbündels in einem Punkt vereinigen (Konvergenz). Bei der Konkav- oder Zerstreuungslinse (rechts) wird ein paralleles Lichtbündel so zerstreut, dass die Lichtstrahlen von einem vor der Linse liegenden Punkt herzukommen scheinen (Divergenz).

2. Optische Achse (OA)

Linsen sind durch Kugelflächen begrenzt. Verbindet man die Mittelpunkte dieser Kugeln, so erhält man die optische Achse (vgl. Abb. 11). Zur optischen Achse parallele Strahlen bezeichnet man als *Parallelstrahlen*.

3. Brennpunkt (F)

Bei einer Sammellinse werden Parallelstrahlen hinter der Linse in einem Punkt, dem Brennpunkt F, vereinigt (Abb. 11 a). Bei einer Zerstreuungslinse verlaufen sie nach Durchgang durch die Linse derart divergent auseinander, als würden sie von einem Punkt vor der Linse, dem Brennpunkt F, ausgehen (Abb. 11 b).

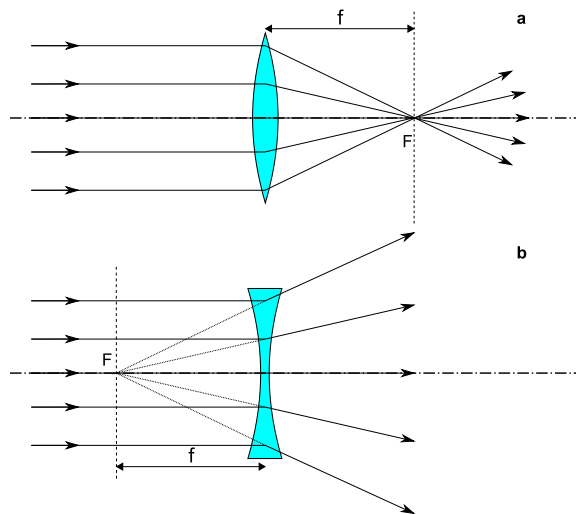


Abb. 11: Brechung von Parallelstrahlen an einer Sammellinse (a) und an einer Zerstreuungslinse (b).

4. Brennweite (f)

Unter der Brennweite f versteht man den Abstand des Brennpunktes von der Linse, s.u.. Bei Zerstreuungslinsen setzt man f als negative Größe in allen Formeln für numerische Berechnungen ein.

5. Brennebene

Verläuft ein Bündel paralleler Strahlen nicht mehr parallel zur OA wie in Abb. 11, sondern trifft es schräg auf die Linse auf (Abb. 12), so werden die Strahlen bei einer Sammellinse nicht mehr im Brennpunkt, sondern in einem Punkt auf der so genannten Brennebene vereinigt, siehe Abb. 12a. Die Brennebene ist dabei die Ebene durch den Brennpunkt, die auf der OA senkrecht steht. Bei einer Zerstreuungslinse verlaufen sie entsprechend divergent auseinander, als würden sie von einem Punkt in der Brennebene herkommen, siehe Abb. 12b.

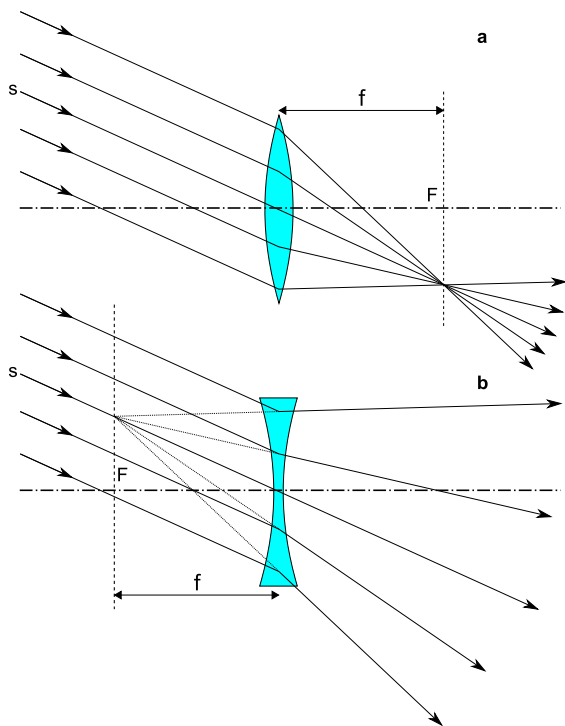


Abb. 12: Brechung schräg einfallender paralleler Strahlen an einer Sammellinse (a) und an einer Zerstreuungslinse (b). Die Brennebenen sind mit gepunkteten Linien vermerkt.

6. Gegenstands- und Bildweite

Fällt Licht von einem Gegenstand auf eine Linse, so entsteht im Regelfall ein Bild. Art, Größe und Lage des Bildes hängt von der Form der Linse und vom Abstand des Gegenstandes von der Linse ab. Den Abstand des Gegenstandes von der Linse bezeichnet man als *Gegenstandsweite* g , den Abstand des Bildes von der Linse

als *Bildweite* b . Als Abstände sind g und b stets positiv. G bezeichnet die Größe des Gegenstands (*Gegenstandsgröße*), B die Größe des Bildes (*Bildgröße*), siehe Abb. 13.

7. Dünne Linsen

Linsen, deren „Eigendicke“ in Richtung der OA im Vergleich zur Brennweite vernachlässigt werden kann, werden als dünne Linsen bezeichnet. Die Eigendicke wird dann als Messunsicherheit bei der Bestimmung von Gegenstandsweite g , Bildweite b und bei direkter Messung der Brennweite f - etwa mit Hilfe paralleler Strahlenbündel - betrachtet. In Abb. 8 sind verschiedene Linsensysteme skizziert. Man kann nur bei bikonvexen Sammellinsen und bikonkaven Zerstreuungslinsen g , b , bzw. f exakt von der „Mitte“, also der „Mittlebene“ (Hauptebene), aus messen. Fast alle Brillengläser sind weder bikonvex noch bikonkav, was bei unseren Versuchen unvermeidlich Messunsicherheiten verursacht.

8. Dicke Linsen

Dicke „Linsen“ sind in der Praxis vor allem ganze abbildende Systeme, wie photographische Objektive, Mikroskopobjektive und Okulare, bei denen die „Dicke“ die Brennweite oft sogar übersteigt. Direktmessungen von g und b wären leicht mit 100% Messunsicherheit (oder mehr) behaftet. Anders als in diesem Versuch lassen sich dann Brennweiten nicht mehr durch relativ einfache Gleichungen bestimmen.

9. Bildkonstruktionen

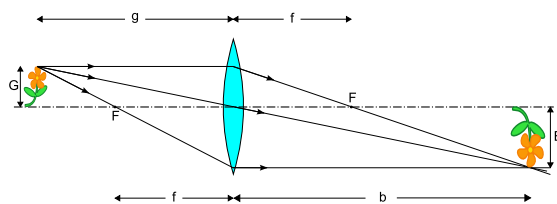


Abb. 13: Bildkonstruktion einer dünnen Sammellinse. Das Bild ist reell, vergrößert und umgekehrt.

Aus Abb. 13 und Abb. 14 entnimmt man leicht den charakteristischen Verlauf dreier Strahlen, die von dem gleichen Objektpunkt stammen. Mit ihnen lässt sich das Bild konstruieren.

- Der Mittelpunkt- oder Zentralstrahl geht ohne Richtungsänderung durch die Linse hindurch. In der „Mitte“ jeder Linse sind die begrenzenden Flächen ja fast parallel, wie bei einer Fensterscheibe! Der Strahl wird nur ein wenig parallel versetzt.

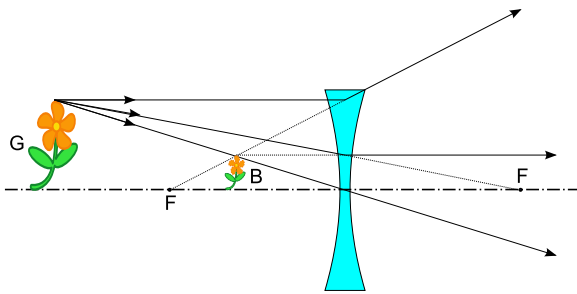


Abb. 14: Bildkonstruktion einer dünnen Zerstreuungslinse. Das Bild ist virtuell, verkleinert und aufrecht.

Betrachtet man die Linse als „dünn“, so vernachlässigt man genau diese Parallelverschiebung, vgl. Strahl s in Abb. 12a und Abb. 12b.

- Ein Parallelstrahl wird bei Sammellinsen stets zum Brennpunkt hin gebrochen. Bei Zerstreuungslinsen ist die Brechung so, als käme er vom rückwärtigen Brennpunkt. Alle einfallenden Strahlen in Abb. 11a und Abb. 11b sind Parallelstrahlen.
- Ein Brennstrahl bei einer Sammellinse kommt vom ihrem Brennpunkt. Er verläuft hinter der Linse stets als Parallelstrahl, vgl. Abb. 13. Bei der Zerstreuungslinse sind Brennstrahlen die Strahlen, die bei unverändertem Durchgang durch die Linse durch den Brennpunkt laufen würden. Sie werden zu Parallelstrahlen, vgl. 14. Da optische Strahlengänge grundsätzlich umkehrbar sind, kann man alle gebrochenen Strahlen in Abb. 11a auch als Brennstrahlen betrachten.

Um das Bild des gesamten Gegenstands zu konstruieren, müsste man das Bild eines jeden Gegenstandspunktes konstruieren. Wenn der Gegenstand Symmetrien besitzt, werden diese bei der Bildkonstruktion berücksichtigt, um den Arbeitsaufwand zu reduzieren. In der Regel reicht es, einzelne geeignete Punkte zu konstruieren.

Jede dünne Linse hat zwei Brennpunkte, die symmetrisch zu beiden Seiten der Hauptebene auf der OA liegen. Statt bei Bildkonstruktionen eine dünne Linse (wie wir) zu „malen“, zeichnet man oft auch nur die Hauptebene als senkrechte Gerade. Abb. 13 illustriert beispielhaft die Bildkonstruktion bei einer Sammellinse. Um hier das Bild sichtbar zu machen, muss man es mit einem Schirm auffangen. Man spricht von einem reellen Bild. Entsprechend zeigt Abb. 14 die Bildkonstruktion an einer Zerstreuungslinse. Da die Lichtstrahlen durch eine Konkavlinse *immer* zerstreut werden, kann sie kein reelles Bild liefern. Die Strahlen rechts hinter der Linse in der Abb. 14 scheinen einem Betrachter dort alle vom oberen Blütenblättchen des (verkleinerten) Bildes der kleinen Blume zu kommen. Dieses Bild kann nicht mit einem Schirm aufgefangen werden. Es handelt sich um ein *virtuelles* Bild.

Auch Sammellinsen können virtuelle (vergrößerte) Bilder erzeugen, wenn die Gegenstandsweite kleiner als die

Brennweite ist (Lupe).

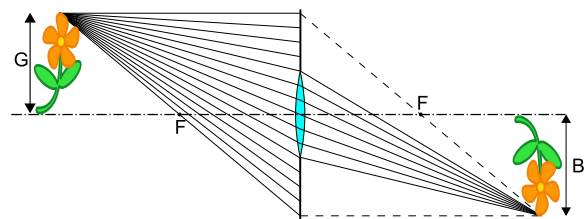


Abb. 15: Tatsächlicher Verlauf der abbildenden Strahlenbündel.

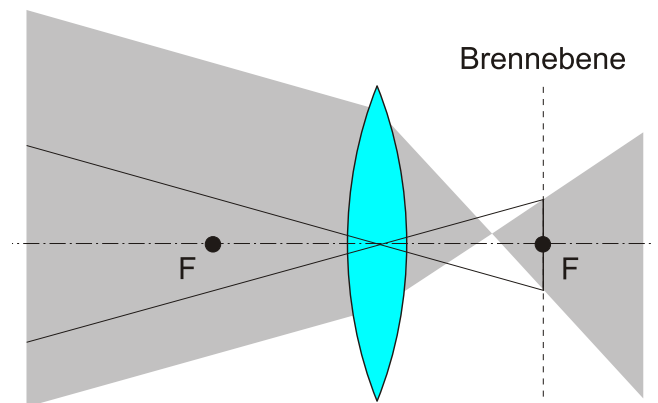


Abb. 16: Bestimmung des Strahlenverlaufs im Fall eines beliebigen Lichtbündels.

Bildkonstruktionen, wie sie hier durchgeführt wurden, geben zwar Bildort und Bildgröße richtig wieder, entsprechen aber in der Regel nicht dem tatsächlichen Verlauf der abbildenden Strahlenbündel (Abb. 15). Dieser ist auch durch Ein- und Austrittspupille bestimmt. Eine *Pupille* ist der gemeinsame Querschnitt aller an der Abbildung beteiligten Lichtbündel. Er heißt für die „dingseitigen“ Lichtbündel Eintritts-, für die „bildseitigen“ Austrittspupille. In Abb. 15 begrenzt die undurchsichtige Linsenfassung ding- und bildseitige Bündel; sie wirkt daher als Eintritts- und Austrittspupille.

Die Bündelbegrenzung spielt eine entscheidende Rolle beim Bau von optischen Instrumenten. Beim Mikroskop etwa bestimmt sie das Auflösungsvermögen. Die genaue Kenntnis der Begrenzung der Lichtbündel durch Pupillen ist für alle optischen Apparate unerlässlich. Oft sitzen Blenden so, dass ein für die Bildkonstruktion notwendiger Strahl im Bündel nicht mehr real enthalten ist: Brennstrahl bzw. Parallelstrahl in Abb. 15. Bei einer Bildkonstruktion darf und muss dieser dann stets als Hilfslinie, wie in Abb. 15, hinzugefügt werden. Schließlich ist nicht immer der tatsächliche Strahlenverlauf so eindeutig wie in Abb. 15, in der das von einem bekannten Gegenstand ausgehende Lichtbündel wieder in einem bestimmten Bildpunkt direkt gesammelt wird. Auch dann, wenn ein beliebiges Lichtbündel (Abb. 16) auf eine Linse bekannter Brennweite trifft, lässt sich sein weiterer Verlauf wie gehabt konstruieren: Man ermittelt unabhängig voneinander den Verlauf der beiden

das Bündel begrenzenden Randstrahlen, indem man paarweise den jeweils parallelen Mittelpunktstrahl als Hilfslinie hinzufügt. Die Linienpaare müssen sich in der Brennebene schneiden, womit man den weiteren Verlauf der Randstrahlen hinter der Linse und damit den des ganzen Bündels kennt (schraffierter Bereich in Abb. 16).

II.5. Die Abbildungsgleichung für eine Linse

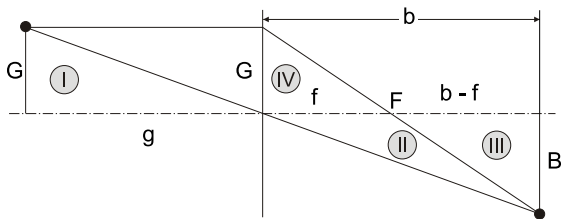


Abb. 17: Zur Herleitung der Abbildungsgleichung.

Reduziert man die Bildkonstruktion von Abb. 13 auf ihr geometrisches „Gerippe“, so bleibt Bild 17 übrig. Die Dreiecke I und das Dreieck, das aus II und III besteht, haben gleiche Winkel, sind also ähnlich. Sie stimmen deshalb auch in den Verhältnissen korrespondierender Seiten überein. Damit lässt sich die Formel für den sog. *Abbildungsmaßstab* ablesen:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \tag{10}$$

Bildgröße zu Gegenstandsgröße verhält sich wie Bildweite zu Gegenstandsweite.

Nun sind aber auch die beiden Dreiecke III und IV ähnlich (übereinstimmend in allen Winkeln). Das liefert

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f} \tag{11}$$

Aus Gl. 10 und Gl. 11 folgt

$$\frac{g}{bf} = \frac{1}{b-f}$$

Dies ist offenbar eine Beziehung, die einen direkten Zusammenhang zwischen Gegenstandsweite g , Bildweite b und Brennweite f herstellt: die sog. *Abbildungsgleichung* (Linsengleichung). Nach einigen einfachen algebraischen Umformungen erscheint sie in der bekannten Form:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{12}$$

Die Herleitung der Abbildungsgleichung haben wir für eine Sammellinse durchgeführt. Die Gleichung 12 gilt auch für Zerstreuungslinsen, man muss aber berücksichtigen, dass die Brennweite f und die Bildweite b negativ sind, weil diese sich auf der Gegenstandsseite der Linse befinden. Mit Hilfe der Gleichung für den

Abbildungsmaßstab (10) und der Linsengleichung (12) kann man einfache optische Systeme analysieren.

II.6. Linsensysteme

Stellt man zwei (dünne) Linsen der Brennweite f_1 und f_2 mit gemeinsamer OA direkt hintereinander auf, so erhält man ein *Linsensystem*. Wie groß wird die Brennweite dieser Kombination? In Abb. 18 sind zwei ver-

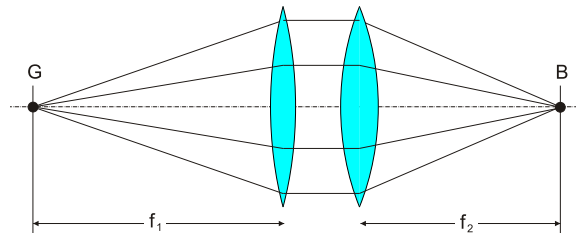


Abb. 18: Tatsächlicher Verlauf der abbildenden Strahlenbündel bei einem Linsensystem.

schiedene Sammellinsen in geringfügigem Abstand gezeichnet, damit man den dazwischenliegenden, parallelen Strahlengang besser verfolgen kann. Befindet sich im Brennpunkt der ersten Linse (links) eine kleine Glühbirne, so werden die von ihr ausgehenden Strahlen nach Durchgang durch die linke Linse zu Parallelstrahlen. Diese werden bei Durchgang durch die rechte Linse in ihrem Brennpunkt vereinigt. f_1 entspricht hierbei also der Gegenstandsweite g der Linsenkombination und f_2 ihrer Bildweite b . Für die Gesamtbrennweite f des Systems liest man deshalb ganz einfach aus Gl. 12 ab:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \tag{13}$$

Das Rechnen mit den Reziprokwerten in Gl. 13 ist in der Praxis aber recht umständlich. Man definiert deswegen in der Optik die sog. *Brechkraft* einer Linse in Vakuum (bzw. Luft mit Brechungsindex $n = 1$) als:

$$D = \frac{1}{f} \tag{14}$$

Allgemein wird die Brechkraft als der Quotient aus dem Brechungsindex n des umgebenden Mediums und der Brennweite der Linse definiert:

$$D = \frac{n}{f} \tag{15}$$

Für Sammellinsen ist die Brechkraft positiv, für Zerstreuungslinsen negativ. Gemessen wird sie in Dioptrien: 1 dpt=1/m. Eine Brillenlinse von 1 m Brennweite hat demnach die Brechkraft 1 Dioptrie; eine Linse mit 0,25 m Brennweite 4 Dioptrien usw.. Gemäß Gl. 13 kann man die Brechkraft direkt addieren, was bequem ist

und in der Brillenoptik zum täglichen Brot gehört.

$$D = D_1 + D_2. \tag{16}$$

Jede der Einzellinsen in Abb. 18 könnte man von vorne herein auch als System (mit bekannter Brennweite) auffassen, für das seinerseits Gl. 16 wieder gilt. Damit lässt sich die Gleichung für mehrere (eng) hintereinander gestellte Linsen verallgemeinern:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + \dots \tag{17}$$

II.7. Das Auge

1. Optischer Aufbau des Auges

Der optische Aufbau des Auges ist in Abb. 19 skizziert. Der Abbildungsvorgang auf die Netzhaut wird durch drei Elemente mit unterschiedlichen Brechungsindizes bewerkstelligt: Hornhaut mit Kammerwasser, Linse und Glaskörper. Die Linse kann durch Kontraktion ihre äußeren Krümmungsradien und damit die Gesamtbrennweite verändern, was die *Akkommodation* (s.u.) ermöglicht. (Beim Projektor regelt man bei starrer Glasoptik die Gegenstandsweite, bei der Kamera die Bildweite zum Zweck der optimalen Abbildung.) Die Iris begrenzt das einfallende Lichtbündel (*Adaptation*) und damit die auf die Retina einfallende Menge an Strahlungsleistung (Helligkeit). Die Iris verändert das Auflösungsvermögen

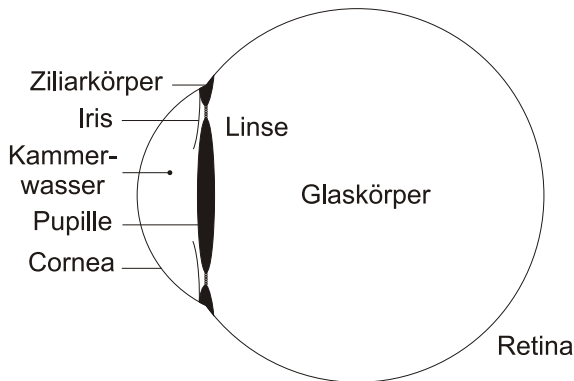


Abb. 19: Optischer Aufbau eines Auges.

nicht. Es ist in der Struktur der Netzhaut festgelegt und beträgt beim normalen Auge ca. 1 Bogenminute, also 1/60 Grad. Der Vollmond erscheint uns unter einem Winkel von (tatsächlich nur!) 30 Bogenminuten. Wir sind daher in der Lage die größeren „Mare“ als dunkle Flecken zu erkennen, nicht aber die Krater. Die größten unter ihnen liegen nur knapp unter 1 Bogenminute und können deswegen schon mit einem Opernglas erkannt werden. Dies ist (bei ca. Halbmond) ein guter Augentest. Wir werden im Folgenden sehen, dass der größte Teil der Brechkraft des (menschlichen) Auges - etwa 2/3! - von der Cornea übernommen wird. Aus diesem Grund wollen wir das Abbildungsverhalten einer

sphärischen Trennfläche zwischen zwei optischen Medien verschiedener Brechungsindizes (n_0 und n_1) quantitativ genauer untersuchen, vgl. Abb. 20.

2. Brechung an einer sphärischen Grenzfläche zweier Medien

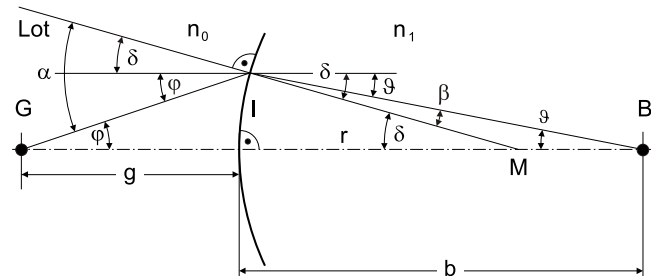


Abb. 20: Abbildungsverhalten einer sphärischen Grenzfläche.

In Abb. 20 geht vom Gegenstandspunkt G auf der OA ein Strahl aus, der nach der Brechung an der Grenzfläche die OA im Bildpunkt B wieder trifft. M ist der Krümmungsmittelpunkt der Kugelfläche und die Verlängerung des gezeichneten Radius, somit ein Lot auf die Fläche. Wendet man das Snellius'sche Brechungsgesetz dort an, so gilt für den Strahl:

$$n_0 \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \beta. \tag{18}$$

Einfallswinkel α und Brechungswinkel β , über die man zunächst gar nichts weiß, lassen sich aber durch drei Hilfswinkel, s.u., ausdrücken: $\alpha = \varphi + \delta$ und $\beta = \delta - \vartheta$. Der Trick der Sache und damit auch der Gültigkeitsbereich des Ergebnisses besteht nun darin, dass man sich auf „achsennahe Strahlen“, also kleine Blendenöffnungen beschränkt. Wer die Herleitung nicht kennt, hält Gl. 20 meist für „absolut gültig“ und könnte sie falsch benutzen. In Abb. 20 bedeutet besagte Näherung, dass man das Stück der sphärischen Fläche noch als „Gerade“ betrachtet, die senkrecht auf der OA steht. Man liest dann sofort aus drei rechtwinkligen Dreiecken an der OA, in denen diese Gerade als Kathete auftaucht, definitionsgemäß ab:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{l}{g}, \\ \tan \delta &= \frac{l}{r}, \\ \tan \vartheta &= \frac{l}{b}. \end{aligned}$$

Wegen der Achsennähe sind die Winkel φ , δ und ϑ sämtlich „klein“, d.h. $\leq 10^\circ$. Man kann deswegen die folgende Näherung anwenden:

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha. \tag{19}$$

Der erste Schritt gilt, da der Cosinus für kleine Win-

kel fast 1 ist. Der zweite ist mathematisch komplexer. Er gilt nur, wenn der Winkel im Bogenmaß ausgedrückt wird. Auch noch beim Winkelwert 10° betragen die Unterschiede nur ca. 1%. Das Snellius'sche Brechungsgesetz (Gl. 18) reduziert sich dann auf:

$$n_0 \cdot \alpha = n_1 \cdot \beta$$

bzw., wenn man die Winkelwerte gemäß oben auch entsprechend genähert einsetzt:

$$n_0 \left(\frac{l}{g} + \frac{l}{r} \right) = n_1 \left(\frac{l}{r} - \frac{l}{b} \right).$$

Wenige elementare Umformungen liefern schließlich das gewünschte Resultat:

$$\frac{n_0}{g} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_0}{r}. \quad (20)$$

Rückt der Gegenstandspunkt G in Abb. 20 nach links ins Unendliche, so geht hier n_0/g gegen Null. Die einfallenden Strahlen werden nahezu parallel zu OA und b wird mit der (bildseitigen) Brennweite f definitionsgemäß zusammenfallen. Aus Gl. 20 folgt dann für die Brechkraft der sphärischen Fläche, die im Auge als Cornea realisiert ist:

$$D_{\text{Cornea}} = \frac{n_1}{f_{\text{Cornea}}} = \frac{n_1 - n_0}{r}. \quad (21)$$

3. Abbildung durch eine Linse zwischen zwei verschiedenen Medien

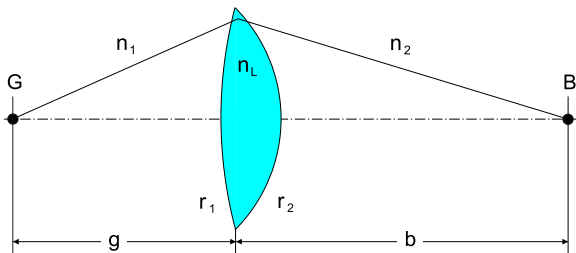


Abb. 21: Abbildungsvorgang im Auge. Der Krümmungsradius der ersten sphärischen Fläche ist $r_1 > 0$. Der Krümmungsradius der zweiten sphärischen Fläche ist $r_2 < 0$.

Die Linse im Auge ist links und rechts (Abb. 21) von zwei verschiedenen optischen Medien begrenzt. Der Abbildungsvorgang durch sie lässt sich gemäß Abb. 21 quantitativ untersuchen. Die für die dünne Linse in Abb. 21 gültige Abbildungsgleichung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2} \quad (22)$$

kann man exakt analog zum Vorgehen bei Gl. 20 herleiten (nur langwieriger) oder einfach sinngemäß durch Addition der Brechkräfte zweier sphärischer Flächen gemäß Gl. 21 begründen. Man stellt sich die Linse als

vertikal durchgeschnitten vor: Der linke Teil hat die Brechkraft $D_1 = \frac{n_L - n_1}{r_1}$, der rechte die Brechkraft $D_2 = \frac{n_L - n_2}{r_2}$. Addition von D_1 und D_2 liefert die Gesamtbrechkraft der Linse:

$$D_L = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2}. \quad (23)$$

Diese sog. *Linsenschleiferformel* folgt umgekehrt aber auch aus Gl. 22, wenn man wieder g gegen unendlich gehen lässt.

Achtung: Konvexe sphärische Flächen haben positiven Krümmungsradius, konkave sphärische Flächen haben negativen Krümmungsradius!

4. Kenngrößen des Auges

Für das Auge gelten folgende Mittelwerte:

- Krümmungsradius der Cornea $r = (7,8 \pm 0,1)$ mm
- Krümmungsradien der Linse $r_1 = (10,0 \pm 0,1)$ mm, $r_2 = (6,0 \pm 0,1)$ mm
- Brechzahl des Linsenmaterials $n_L = (1,416 \pm 0,001)$
- Brechzahl des Kammerwassers und des Glaskörpers $n_1 = n_2 = (1,333 \pm 0,001)$
- Brechzahl der Luft $n_0 = (1,000 \pm 0,001)$
- Brechkraft der Cornea $D_{\text{Cornea}} = 42,7$ dpt.
- Brechkraft der Linse $D_{\text{Linse}} = 22,1$ dpt (variabel).

5. Akkommodation und Fehlsichtigkeit

Bei der Abbildung eines Gegenstands im menschlichen Auge entsteht das Bild auf der Netzhaut. Die Bildweite b bleibt also konstant, aber die Gegenstandsweite g ist für jeden Gegenstand unterschiedlich. Um ein scharfes Bild auf der Netzhaut zu bekommen, muss die Abbildungsgleichung (Gl. 12) erfüllt werden. Bei veränderbarer Gegenstandsweite und fester Bildweite muss sich die Brennweite des Auges für jede Gegenstandsweite verändern. Diese Anpassung der Brennweite des Auges nennt man *Akkommodation*. Die Akkommodation wird von der Augenlinse mit Hilfe des Ziliarmuskels und der Zonulafasern erreicht. Es werden dabei die Krümmungsradien der elastischen Augenlinse verändert und damit ihre Brennweite f_{Linse} . Bei der Anpassung des Auges auf einen Gegenstand, der sich sehr weit weg befindet, ist der Ziliarmuskel entspannt und die Zonulafasern sind angespannt. Die Augenlinse ist dann gedehnt und abgeflacht, die Linsenradien sind dabei vergrößert, was nach der Linsenschleiferformel (Gl. 23) eine Verkleinerung der Brechkraft der Linse (Vergrößerung von f_{Linse}) bedeutet. Bei der Anpassung auf einen Gegenstand, der sich in der Nähe befindet, wird der Ziliarmuskel angespannt und die Zonulafasern werden entspannt,

was zu einer Wölbung der Linse führt. Die Krümmungsradien der Linse werden dabei verkleinert, was eine Vergrößerung der Brechkraft der Linse (Verkleinerung von f_{Linse}) bedeutet.

Die beiden Grenzen der Akkommodation werden Fernpunkt und Nahpunkt genannt. Der Nahpunkt ist der Punkt, dessen Gegenstandsweite $g = s_N$ der kleinste Abstand ist, bei dem der Gegenstand scharf auf der Netzhaut abgebildet werden kann. Der Fernpunkt hat die größte Gegenstandsweite $g = s_F$, bei der der Gegenstand noch scharf auf der Netzhaut abgebildet werden kann. Beim normalsichtigen Auge liegt der Fernpunkt im Unendlichen. Der Nahpunkt s_N verändert sich mit dem Alter. Bei Jugendlichen ist der Nahpunkt $s_N = 10 \text{ cm}$ vom Auge entfernt. Bei sechzigjährigen Personen erhöht sich die Entfernung auf $s_N \approx 200 \text{ cm}$. Aus s_F und s_N wird die *Akkommodationsbreite*

$$X = \frac{1}{s_N} - \frac{1}{s_F}, [X] = \text{dpt}$$

bestimmt.

Eine *Fehlsichtigkeit* des Auges liegt vor, wenn die Abbildung eines Gegenstands nicht auf der Netzhaut liegt. Ist die Brennweite eines Auges zu groß, d.h. seine Brechkraft zu klein, so würden die Bilder erst hinter der Retina entstehen. Man bezeichnet ein solches Auge als weitsichtig (hyperop). Zur Beseitigung dieses Augenfehlers verwendet man Konvexlinsen als Brillengläser. Gerade umgekehrt ist es bei der Kurzsichtigkeit (Myopie). In diesem Fall ist die Brennweite des Auges zu klein, d.h. seine Brechkraft zu groß, so entstehen die Bilder vor der Retina. Die Kurzsichtigkeit kann durch Vorschaltung einer Konkavlinse korrigiert werden. Auch die altersbedingte Weitsichtigkeit (Presbyopie) kann durch Verwendung einer Sammellinse korrigiert werden. Die Brechkraft der Linse, die für die Korrektur der Fehlsichtigkeit erforderlich ist, wird grob nach Gl. 16 bestimmt:

$$D_{\text{Brille}} = D_{\text{Gesamt}} - D_{\text{Auge}}$$

Der *graue Star* ist eine Trübung der Augenlinse, durch die nur noch wenig Licht ins Auge fällt. Die Behandlung ist die Entfernung der Augenlinse. Früher übernahm eine sog. „Starbrille“ die Funktion der Linse, ihre Brechkraft liegt größenordnungsmäßig um 15 dpt.. Durch die sehr hohe Brechkraft fällt eine solche Brille durch extreme Dicke auf. Das Sichtfeld ist eingeschränkt, sie ermöglicht aber genaues Sehen. Heute implantiert man stattdessen oft eine künstliche Linse, die sog. Intraokularlinse.

II.8. Linsenfehler

1. Sphärische Aberration

Als sphärische Aberration bezeichnet man die Erscheinung, dass Randstrahlen bei Linsen zu stark gebrochen werden, d.h. in kürzerem Abstand die optische

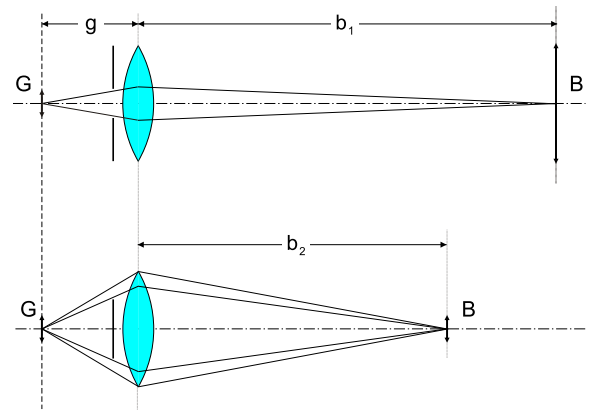


Abb. 22: Sphärische Aberration.

Achse schneiden. Die Größe der sphärischen Aberration charakterisiert man durch die Differenz Δf der Brennweiten von Zentral- und Randstrahlen. Bei gleicher Gegenstandsweite g wird die Bildweite im Fall der Randstrahlen offensichtlich kleiner (Abb. 22). Mit Hilfe der (gemessenen) Werte b_1 und b_2 liefert Gl. 12 direkt $\Delta f = f_1 - f_2$. Die sphärische Aberration tritt bei allen Linsen mit Kugelflächen auf. Ist die Iris weit geöffnet, führt dies beim Auge zu wachsenden Unschärfen, was das Erkennen mühsamer macht: Schlechtes Dunkelsehen. Dass man bei guter Beleuchtung schärfer sieht, liegt also primär an der geringeren sphärischen Aberration, nicht an der größeren Helligkeit, die das Auge ja gerade über die Iris nachregelt.

2. Chromatische Aberration

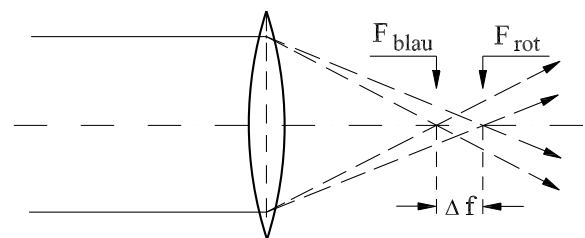


Abb. 23: Chromatische Aberration.

Der zweite klassische „Linsenfehler“, die chromatische Aberration, besteht darin, dass die Brechungsindizes wellenlängenabhängig, und damit Bild- und Brennweiten unterschiedlich für verschiedenfarbiges Licht sind (vgl. Abb.23). Auch dies führt zu Unschärfen der Abbildung. Sie sind erheblich (1,8 dpt: violett-rot) im Auge, werden vom Gehirn im Rahmen der „Bildverarbeitung“ jedoch perfekt „weggerechnet“!

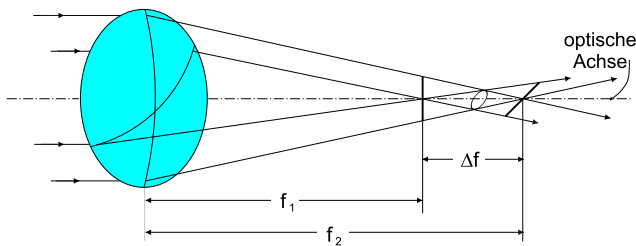


Abb. 24: Entstehung des Astigmatismus.

3. Astigmatismus

Wir sind bisher von der Idealvorstellung ausgegangen, dass die Augenlinse durch Kugelflächen begrenzt wird. In der Realität ist das jedoch nicht der Fall, vielmehr sind die Krümmungsradien jeder der beiden Flächen in zwei senkrecht zueinander verlaufenden Schnittebenen stets mehr oder weniger verschieden. Das hat zur Folge, dass ein achsenparalleles Lichtbündel nicht mehr durch einen einzigen Brennpunkt verläuft, vgl. Abb. 24. Die unterschiedlichen Krümmungsradien entsprechen zwei verschiedenen Brennweiten je nach dem, ob man parallel einfallende Strahlen in der Horizontal- oder Vertikalebene betrachtet. In Abb. 24 ist die Brennweite im ersten Fall (f_1) kleiner als im zweiten. Während das Horizontalbündel im Abstand f_1 von der Linse schon maximal eingeschnürt ist, hat das Vertikalbündel dort noch eine Ausdehnung größer als 0.

Man beobachtet eine senkrechte „Brennlinie“, statt eines Brennpunktes und im Abstand f_2 entsprechend eine waagrechte Linie. Durch die Brennweitendifferenz $\Delta f = f_2 - f_1$ kann man die Größe des Astigmatismus kennzeichnen. Korrigiert wird der Astigmatismus des Auges durch ein Brillenglas mit gleich großem astigmatischen Fehler, das jedoch genau um 90° verdreht in das Brillengestell montiert werden muss, um eine Kompensation des Fehlers zu erreichen. Ist der astigmatische Fehler des Auges gering ($f_2 \gg \Delta f \ll f_1$), so wird eine zwischen f_1 und f_2 liegende Distanz für das Sehen im Unendlichen vom Gehirn ausgewählt. Die Sehschärfe ist aber herabgesetzt. Ist der Fehler größer, dann pendelt die Augenlinse zwischen den beiden Brennlinien hin und her, um verwertbare Daten weiterliefern zu können, während das Gehirn permanent mittelt. Das ist jedoch anstrengend, ermüdend und verursacht u.a. Kopfschmerzen, die typischen subjektiven Symptome bei stärkerem Astigmatismus. In der Praxis auf der optischen Bank kann man den Astigmatismus eines Brillenglases dadurch messen, dass man eine punktförmige Lichtquelle (Lochblende) im Endlichen auf einen Schirm abbildet. Die beiden Positionen der orthogonalen „Bildlinien“ legen zwei Wertepaare g_1 und b_1 , bzw. g_2 und b_2 fest, die mit Hilfe von Gl. 12 entsprechend f_1 und f_2

ergeben.²

III. VERSUCHSAUFBAU UND GERÄTE

III.1. Zubehör

... für die Online-Versuche

Optische Bank mit Reitern, Lichtquelle, Justiernadel, Schirm (vgl. Abb. 25), verschiedene Dias, Brillenglas ohne Astigmatismus (L1 oder L2 oder...), Brillenglas mit Astigmatismus (LA); Starbrillenglas (LS); Augenmodell (Plexiglasgefäß mit sphärischer Fläche, vgl. Abb. 31), dazu Linse, Schirm (=Netzhautmodell); Probiergläser mit Halterung, Rollbandmaß.

... für die „Versuche daheim“

Sie führen den Versuch daheim mit einem Teelicht, einer Linse (Lupe, ersatzweise Brillenglas mit mind. 2 dpt) und einem Meterstab/Maßband/Lineal durch.

III.2. Brennweitenbestimmung mit Hilfe der Abbildungsgleichung

Zwischen einem Gegenstand, der von einer Lichtquelle beleuchtet wird, und einem Schirm lässt sich eine verschiebbare Linse anbringen (vgl. Abb. 25). Während des Versuchs bleibt der Abstand zwischen der Lichtquelle und dem Schirm fest.

Wird ein scharfes Bild auf dem Schirm erzeugt, so gilt die Abbildungsgleichung. In dieser Situation wird die Gegenstandsweite g und die Bildweite b bestimmt und damit schließlich die Brennweite f berechnet. Da die Lichtwege umkehrbar sind, erhält man auch bei Vertauschung von g und b ($g_1 = b_2$ und $g_2 = b_1$) ein zweites scharfes Bild, vgl. Abb. 28.

Ist die Linse näher am Gegenstand ($g < b$), so wird das Bild wegen Gl. (10) vergrößert und im umgekehrten Fall verkleinert.

III.3. Bessel-Verfahren

Da es zur Erzeugung eines reellen Bildes auf dem Schirm zwei mögliche Linsenpositionen gibt, lässt sich die Brennweite f auch aus dem Abstand e dieser beiden Positionen und dem Abstand a von Gegenstand und Schirm berechnen. Nach Abb. 28 gilt

$$a = g_1 + b_1 \tag{24}$$

² Hilfsvideo zur Theorie: <https://www.youtube.com/watch?v=9xTOxfxn6I>

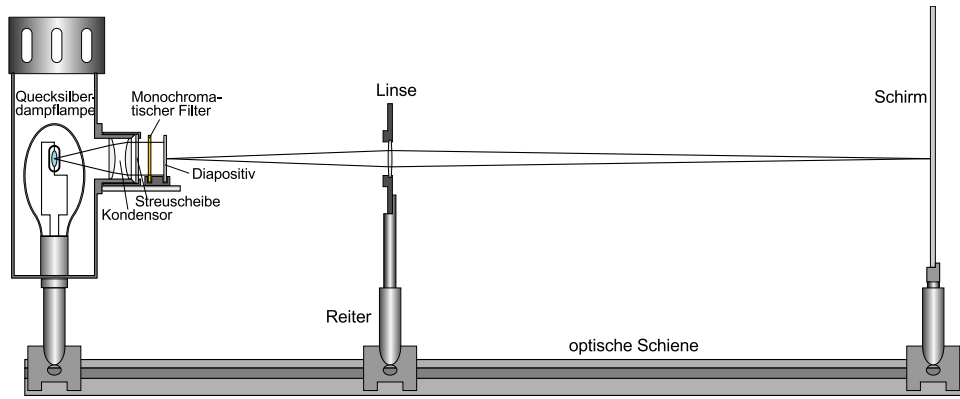


Abb. 25: Versuchsaufbau zur Untersuchung von Strahlengängen durch Linsen.

und wegen der Umkehrbarkeit des Lichtweges auch

$$e = b_1 - b_2 = b_1 - g_1.$$

Addiert bzw. subtrahiert man beide Gleichungen, so erhält man $2b_1 = a + e$ und $2g_1 = a - e$.

Mit der dritten Binomischen Formel ergibt sich:

$$f = \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} \right)^{-1} = \frac{g_1 \cdot b_1}{g_1 + b_1} = \frac{2b_1 \cdot 2g_1}{4(g_1 + b_1)}$$

$$= \frac{(a + e)(a - e)}{4a} = \frac{a^2 - e^2}{4a}. \quad (25)$$

IV. VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Bitte achten Sie auf Ihre Haare und sonstige brennbare Gegenstände! Wir übernehmen keine Haftung für Zimmerbrände!

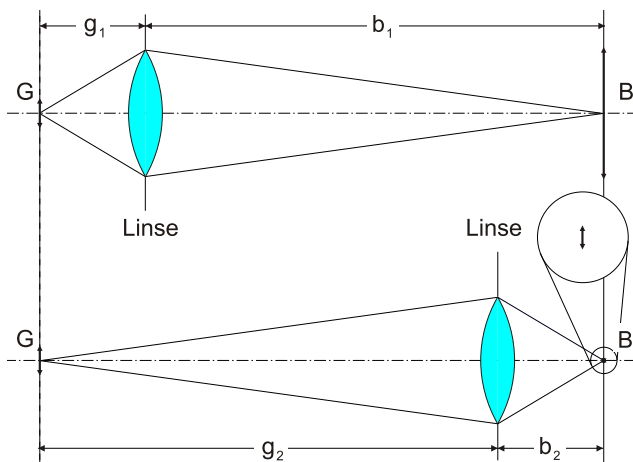


Abb. 26: Vergrößerte und verkleinerte Abbildung

IV.1. Messprinzip (Versuch „daheim“)

1. Kurzbeschreibung

Sie lernen Umgang mit einer Linse und das Messprinzip kennen.

2. Messgrößen

- Beobachtung des durch die Linse erzeugten Abbildes.

3. Durchführung

Sie erzeugen ein Bild von einem weit entfernten Gegenstand. Nehmen Sie die Linse in die eine Hand und ein Blatt Papier in die andere. Versuchen Sie, auf dem Papier ein Bild Ihres Zimmerfensters zu erzeugen. Dabei sollten Sie ein verkleinertes, umgekehrtes Bildsehen. Da das Fenster fast „unendlich“ weit von der Linse entfernt ist, muss die Linse nun ungefähr eine Brennweite Abstand zum Papier haben.³

IV.2. Messung von Bild- und Gegenstandsweite (Versuch „daheim“)

1. Kurzbeschreibung

Sie erzeugen mit Ihrer Lupe ein reelles Bild Ihres Teelichts. Sie messen direkt die Bild- und Gegenstandsweite und bestimmen daraus mit der Abbildungsgleichung die Brennweite Ihrer Linse.

³ Falls Vergrößerung oder Brechkraft Ihrer Linse unbekannt sind, benutzen Sie diese Methode, um vorab die Brennweite grob zu bestimmen.

2. Messgrößen

- Gegenstands- und Bildweiten (g_i, b_i) bei der Abbildung des Teelichtes für drei verschiedene Abstände a_i

3. Durchführung

Stellen Sie im abgedunkelten Raum ein brennendes Teelicht in mindestens 2 m Abstand von einer Wand auf und halten die Linse auf Höhe des Teelichtes dazwischen. Verschieben Sie die Position der Linse zwischen Wand und Teelicht, bis Sie die vergrößerte und verkleinerte Abbildung auf der Wand erkennen. Statt der Wand können Sie auch ein Blatt Papier verwenden (ggf. mit Klebstreifen fixieren).

Um die Gegenstands- und Bildweite so gut es geht zu messen, ist es hilfreich, eine Halterung für Ihre Linse bauen. Außerdem müssen Schirm, Linse und Lampe auf einer Achse liegen.

Dokumentieren Sie Ihre Messung mit einem Foto des Versuchsaufbaus.

Führen Sie die Messung nacheinander für drei verschiedene Abstände durch und vergewissern Sie sich, dass Gl. (24) gilt. Protokollieren Sie die Messung in Tabellenform, z.B.

Abbildung	a_i/cm	g_i/cm	b_i/cm
vergrößert			
verkleinert			

IV.3. Bessel-Verfahren (Versuch „daheim“)

1. Kurzbeschreibung

Sie erzeugen mit Ihrer Lupe wieder ein reelles Bild Ihres Teelichtes. Anschließend bestimmen Sie die Linsenbrennweite mit dem Bessel-Verfahren.

2. Messgrößen

- Abstände e_i für drei verschiedene Abstände a_i

3. Durchführung

Leider kann e nicht direkt gemessen werden. Deshalb lohnt es sich spätestens jetzt, den Versuchsaufbau mit einer Skala auszustatten, um die Linsenpositionen für die vergrößerte und verkleinerte Abbildung ablesen zu können.

IV.4. Bestimmung der Brennweite des Brillenglases ohne Astigmatismus

1. Kurzbeschreibung

Mit einem Brillenglas erzeugen Sie ein reelles Bild. Damit bestimmen Sie die Brennweite und berechnen ihre Unsicherheit.

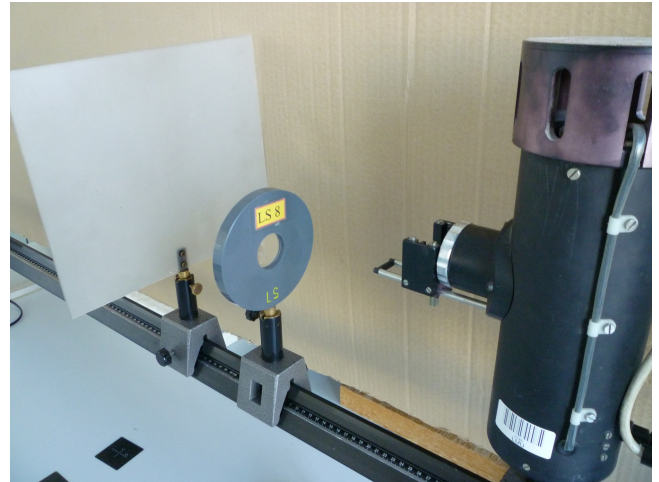


Abb. 27: Versuchsaufbau und Zubehör zum Teilversuch IV IV.4.

2. Messgrößen und Durchführung

Die folgenden Versuche werden an der optischen Bank (Schiene) durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abb. 25 und als Bild in Abb. 27 zu sehen.

- Verwenden Sie das Brillenglas im grauen Rahmen mit der Buchstabenkennzeichnung L und einer Zahl dahinter. Notieren Sie sich die Nummer der Linse. Lichtquelle und Schirm werden in möglichst großem Abstand voneinander auf der optischen Bank aufgestellt, die matte Fläche des Schirms der Lichtquelle zugewandt (um Reflexe zu vermeiden). Beides bleibt im Folgenden so stehen.
- Das Dia (Kaiser Maximilian) wird in die Halterung an der Lichtquelle eingeklemmt. Nehmen Sie die Halterung, die von der Lampe am weitesten weg ist; die weiße Seite des Diarahmens zur Lampe hin.
- Die Linse wird zwischen Schirm und Lichtquelle verschiebbar aufgestellt und mit Hilfe der Justiernadel auf gleiche Höhe wie das Testzeichen gebracht.
- Da Strahlengänge umkehrbar sind, kann man durch Verschieben der Linse zwei symmetrische Positionen finden, die ein scharfes Bild liefern, vgl. Abb. 28. Bild- und Gegenstandsweite sind dann vertauscht. Ist die Linse näher am Gegenstand, so wird das Bild wegen Gl. 10 vergrößert und im umgekehrten Fall verkleinert. Messen Sie die Position

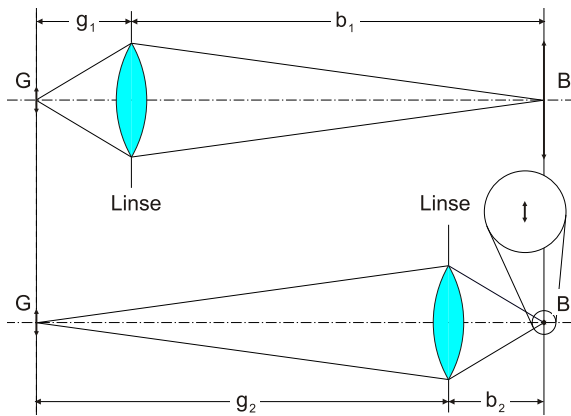


Abb. 28: Vergrößerte und verkleinerte Abbildung.

der Linse **dreimal** abwechselnd für die vergrößerte und verkleinerte Abbildung und tragen Sie die Messwerte in eine Tabelle der folgenden Art ein:

Abbildung	Linsenposition / cm	Gegenstandsweite / cm	Bildweite / cm
vergrößert			
verkleinert			

- Notieren Sie außerdem die Position des Dias (Objekt) und die des Schirms.
- Notieren Sie etwaige Messunsicherheit (beim Ablesen, etc.).⁴

IV.5. Bestimmung der Brennweite eines Starbrillenglases

1. Kurzbeschreibung

Sie vermessen eine Starbrille, indem Sie mit ihr wieder ein reelles Bild erzeugen. Durch die große Linsendicke ist es schwieriger, eine präzise Messung zu bewerkstelligen. Mit einem Sphärometer überprüfen Sie die Brechkraft der Brille.

2. Messgrößen und Durchführung

- Verwenden Sie die Linse mit der Kennzeichnung LS und einer Zahl dahinter.
- Messen Sie – analog wie in Teilversuch VV.4 – Gegenstandsweite und Bildweite für die vergrößerte und verkleinerte Abbildung. Der Messvorgang läuft wie bei dem einfachen Brillenglas ab, nur ist er in der Praxis schwieriger durchzuführen, wie Sie sehen werden; g und b sind sehr unterschiedlich

⁴ Hilfsvideo zum Teilversuch: <https://www.youtube.com/watch?v=SYYqzaHEtRc>

und die konkav-konvexe Linse ist relativ „dick“. Schätzen Sie die Ungenauigkeit der Messungen, also Δg und Δb ab. Dabei ist die Unsicherheit beim Scharfstellen, sowie Linsendicke besonders zu berücksichtigen.

- Bestimmen Sie nun die Dioptrienzahl der Linse direkt mit Hilfe des Sphärometers⁵ (vgl. Abb. 29) gemäß Anleitung durch die/den Betreuer/-in. Auf der ebenen Tischplatte aufgesetzt sollte das Sphärometer 0 anzeigen. Bestimmen Sie aus diesen Werten direkt am Arbeitsplatz die Brechkraft. Der Brechungsindex des Brillenglases ist $n_G = 1,5$. Liegt Ihr Wert nicht zwischen 1 dpt und 10 dpt, sollten Sie die Messung wiederholen.



Abb. 29: Zubehör zum Teilversuch IV IV.5.

IV.6. Untersuchungen eines astigmatischen Brillenglases

1. Kurzbeschreibung

Sie bestimmen die Brennweiten einer astigmatischen Linse. Dazu betrachten Sie eine horizontale und vertikale Lochblende. Über die Positionen, bei denen sich ein horizontal bzw. vertikal scharfes Bild ergibt, berechnen Sie die horizontale und vertikale Brennweite.

⁵ Ein Sphärometer wird verwendet, um den Radius einer gekrümmten sphärischen Fläche zu vermessen. Zuerst wird die Mikrometerschraube so gedreht, dass das Sphärometer flach auf dem Labortisch liegt. Dann wird die Tischposition h_0 am Mikrometer abgelesen. Anschließend werden die Flächen der Linse vermessen und die Größen h_{konkav} bzw. h_{konvex} abgelesen. Danach werden die Krümmungsradien berechnet:

$$r_{\text{konkav}} = \frac{(s_a)^2 + (h_{\text{konkav}} - h_0)^2}{2(h_{\text{konkav}} - h_0)}, \text{ mit } s_a = 17,5 \text{ mm}$$

$$r_{\text{konvex}} = \frac{(s_i)^2 + (h_{\text{konvex}} - h_0)^2}{2(h_{\text{konvex}} - h_0)}, \text{ mit } s_i = 15,0 \text{ mm.}$$

2. Messgrößen und Durchführung

- Verwenden Sie die Linse mit der Buchstabenkennzeichnung LA und einer Zahl dahinter. Notieren Sie sich die Nummer der Linse.
- Benutzen Sie jetzt die kleine kreisförmige Blende vor der Lichtquelle, anstatt des Dias und beschränken Sie sich auf die verkleinerte Abbildung.
- Schieben Sie dazu die Linse vom Gegenstand weg, bis Sie eine der Bildlinien der Lochblende (in bestmöglicher Qualität) auf dem Schirm beobachten. Bestimmen Sie die Linsenposition.
- Verschieben Sie die Linse weiter von der Lichtquelle weg, bis die dazu senkrechte Bildlinie auf dem Schirm möglichst gut zu beobachten ist und notieren Sie wiederum die Linsenposition.

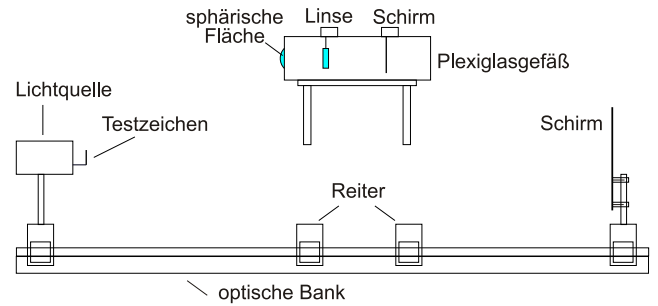


Abb. 31: Augenmodell.

- Das Plexiglasgefäß wird mit Hilfe zweier Reiter auf der optischen Bank fest aufgestellt und zwar so, dass die sphärische Fläche ca. 30 bis 40 cm vom Testzeichen (= Gegenstand) entfernt ist (vgl. Abb. 31).
- Die Höhe der Wanne wird unter Verwendung der Justiernadel so eingestellt, dass die Mitte der sphärischen Fläche genauso hoch ist wie die Mitte des Testzeichens.
- Nun wird das „Auge“ präpariert: Füllen Sie destilliertes Wasser in das Gefäß und setzen Sie eine Linse (hängend) direkt hinter der sphärischen Fläche ein.
- Suchen Sie dann die Position der kleinen Mattscheibe im Wasser hinter der Linse auf, an der die Abbildung am besten erscheint. Das entspricht der Position der Netzhaut. Jetzt messen Sie für diese Anordnung Gegenstandsweite g_1 und Bildweite b_1 mit Hilfe des Metermaßstabes. Als Bezugspunkt wählen Sie die Mitte zwischen der sphärischen Fläche und der Linse.

IV.7. Untersuchungen am Augenmodell

1. Kurzbeschreibung

Am Augenmodell untersuchen Sie die Abbildung im Auge. In einer simulierten Staroperation entfernen Sie die Augenlinse. Es bleibt nur noch die Brechkraft der sphärischen Fläche (Cornea). Experimentell suchen Sie eine passende Starbrille. Anschließend erzeugen Sie mit der sphärischen Fläche allein ein Bild und bestimmen ihre Brechkraft.

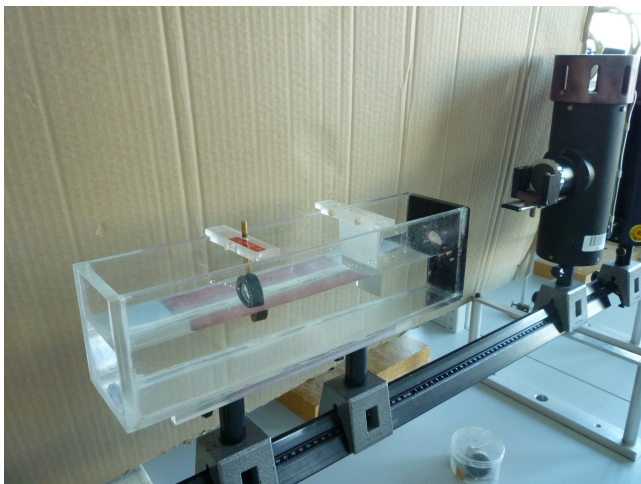


Abb. 30: Zubehör zum Teilversuch IV IV.7.

2. Ausführung einer „Staroperation“

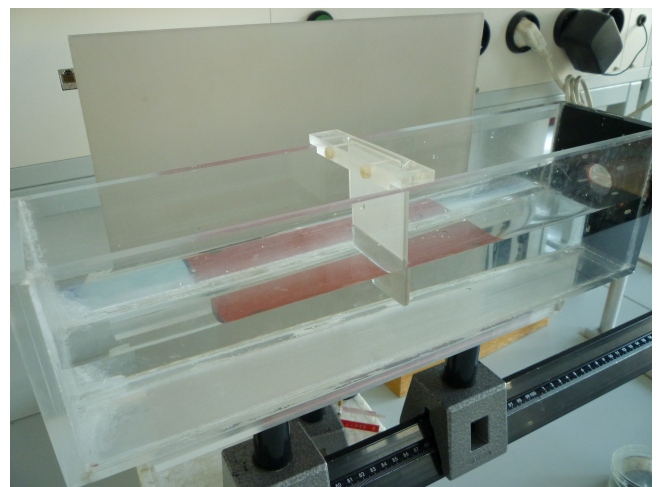


Abb. 32: Zubehör zum Teilversuch IV IV.7.

2. Messgrößen und Durchführung

Der Teilversuch gliedert sich in drei Arbeitsschritte:

1. Aufbau des Augenmodells

- Als Testzeichen soll bei den folgenden Experimenten die gerahmte, mit Löchern versehene Alufolie verwendet werden.

- Sie entnehmen die Linse aus dem Gefäß (ohne Narkose). Das Bild wird unscharf.

- Verpassen Sie nun dem Modellauge eine Starbrille. Suchen Sie aus dem Sortiment von „Probiergläsern“ eine passende „Brille“ heraus, die vor die sphärische Fläche gehalten die Wirkung der „herausoperierten“ Linse in etwa ersetzt.
- Notieren Sie den Dioptrienwert (er steht am Griff).

3. Brechkraft der sphärischen Fläche

- Entfernen Sie nun die Starbrille.
- Verschieben Sie die kleine Mattscheibe im Modell weiter nach hinten, bis die Abbildung wieder möglichst optimal ist.
- Notieren Sie die neue Bildweite b_2 und die neue Gegenstandsweite g_2 . Beachten Sie, dass die sphärische (Wasser-) Fläche allein ausreicht, um ein scharfes Bild in unserer Wanne zu erzeugen.
- Wenn Sie die Messungen beendet haben, entleeren Sie das Augenmodell, räumen auf und beginnen mit der:

V. AUSWERTUNG

V.1. Messprinzip (Versuch „daheim“)

Keine Auswertung.

V.2. Messung von Bild- und Gegenstandsweite (Versuch „daheim“)

Berechnen Sie aus der Brechkraft D des Brillenglases oder der Vergrößerung v der Lupe (Herstellerangabe) die Brennweite der Linse. Für das Brillenglas gilt Gl. (15) bzw. für die Lupe gilt $v = \frac{s_0}{f}$ mit der konventionellen Sehweite $s_0 = 25 \text{ cm}$ (Vgl. OIN).

Berechnen Sie für jedes a_i aus den Gegenstands- und Bildweiten für das vergrößerte bzw. für das verkleinerte Bild die Brennweite der Linse als Mittelwert mit Schwankung.

Vergleichen Sie diese drei Messwerte untereinander und mit der Herstellerangabe.

V.3. Bessel-Verfahren (Versuch „daheim“)

Berechnen Sie gemäß Gl. (25) die drei Werte für die Brennweite Ihrer Linse. Aus den Brennweiten bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung und die Unsicherheit des Mittelwertes.

Stimmt Ihr Wert mit der Herstellerangabe und den Ergebnissen aus V V.2 innerhalb der Messunsicherheiten überein? Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Welche Fehlerquellen liegen vor? Welches Messverfahren ist das bessere?

V.4. Bestimmung der Brennweite des Brillenglases ohne Astigmatismus

- Tragen Sie in die beiden anderen Spalten der Tabelle die Gegenstandsweiten und Bildweiten ein.
- Berechnen Sie aus Ihren Daten die Mittelwerte für g_1 und b_1 für das vergrößerte bzw. g_2 und b_2 für das verkleinerte Bild mitsamt deren Unsicherheiten.
- Aus den Mittelwerten für g_1 und b_1 bzw. g_2 und b_2 berechnen Sie mit Hilfe von Gl. 12 die Brennweite der Linse für jede Messreihe mitsamt der jeweiligen Unsicherheit Δf . Berechnen Sie Δf über:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Δg und Δb sind die Schwankungen von g und b , die Sie in Ihrer jeweiligen Messreihe finden können.

Es sollte natürlich im Rahmen der Messgenauigkeit ein und dieselbe Brennweite herauskommen.

- Geben Sie den Mittelwert Ihrer beiden Ergebnisse als Endresultat an und bestimmen Sie die Gesamtunsicherheit Ihrer Messung.

V.5. Bestimmung der Brennweite eines Starbrillenglases

- Führen Sie dieselbe Berechnung wie in Teilversuch V V.4 durch, diesmal ohne Unsicherheiten.
- Geben Sie Brennweite sowie Dioptrienzahl der Starbrille an und vergleichen Sie Ihren Messwert mit dem Sphärometerergebnis. Achtung: Die Sphärometerergebnisse sind keineswegs exakter oder „richtiger“! Die Geräte können ungenau sein!

V.6. Untersuchungen eines astigmatischen Brillenglases

- Wieder unter Verwendung von Gl. 12 ermitteln Sie die Brennweiten f_1 und f_2 für die beiden Lichtbündel in den orthogonalen Ebenen (ohne Betrachtung der Messunsicherheit).
- Bestimmen Sie den Astigmatismus des Brillenglases!

V.7. Untersuchungen am Augenmodell

Nach Gl. 20 und 21 kann man die Brechkraft der sphärischen Fläche so berechnen:

$$D = \frac{n_0}{g} + \frac{n_1}{b}$$

Führen Sie diese Berechnung (ohne Betrachtung der Messunsicherheit) mit $n_0 = 1$ für Luft und $n_1 = 1,33$ für Wasser zweimal durch und zwar:

- für das „vollständige Auge“, also das optische System „sphärische Fläche + Linse in Wasser“ unter Verwendung von g_1 und b_1 . Dieses Vorgehen beinhaltet eine Näherung.
- für das „staroperierte Auge“ unter Verwendung von g_2 und b_2 .
- Welcher prozentuale Anteil der Gesamtbrechkraft

fällt in unserem Modell danach der Glaslinse in Wasser zu?

- Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer „Probierbrille“. Macht es Sinn, dass Sie gerade diese gewählt haben?
- Berechnen Sie ohne Unsicherheit aus den Daten des letzten Versuchs den Krümmungsradius der sphärischen Fläche in unserem Augenmodell mit Hilfe von Gl. 21.